МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Н.М.Махмеджанов, Р.Н.Махмеджанова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Рекомендовано Министерством образования
и науки Республики Казахстан
в качестве учебного пособия для студентов
нематематических специальностей вузов

АЛМАТЫ 2009

ББК 22.1я73
М31

Рекомендовано Министерством образования
и науки Республики Казахстан
в качестве учебного пособия для студентов
нематематических специальностей вузов

Н.М.Махмеджанов, Р.Н.Махмеджанова.
М31 Сборник задач по высшей математике. — Алматы: Дәуір, 2009. —408 стр.

ISBN 978-601-217-032-0

Сборник задач написан в соответствии с новой программой по высшей математике для технологических, технических, естественных и экономических специальностей вузов.

Содержит задачи и примеры по следующим важнейшим разделам: числа и системы координат; линейная алгебра; векторная алгебра; аналитическая геометрия; функция и ее предел; производная и ее приложения; интеграл и его приложения; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; интегральное исчисление функций нескольких переменных; ряды; дифференциальные уравнения.

Приведены основные теоретические сведения, решения типовых примеров и задач, задачи и примеры для самостоятельной работы с решениями, ответами и указаниями.

ББК 22.1я73

ISBN 978-601-217-032-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано авторами на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по высшей математике на нематематических факультетах Казахского Национального университета им. Аль-Фараби и в институте повышения квалификации преподавателей вузов Республики Казахстан, а также в некоторых высших технических учебных заведениях страны.

Математика в переводе с греческого “mathema”− означает знание. Этим обьясняется цели и задачи дисциплины.

Курс высшей математики является фундаментальной базой для естественных, технических и экономических специальностей. Для качественной подготовки специалистов по кредитной технологии требуются не только учебники, но и задачники, необходимые для закрепления теоретического материала на практических занятиях и при самостоятельной работе студентов, а также пригодные для самообразования.

Данный “Сборник задач” непосредственно связан с учебником “Высшая математика” академика РАН, профессора МГУ им. М. В. Ломоносова В.А.Ильина и А.В. Куркиной (для специальностей “Биология”, “География”, “Химия”, “Экономика”, “Геология”, “Психология”, “Социология”, “Менеджмент”, “Почвоведение”), где высшая математика рассматривается как едино- целостная дисциплина.

Учебное пособие состоит из 11 глав. Каждая глава разделена на параграфы. В начале каждого параграфа приведены необходимые теоретические сведения и формулы, затем приводятся решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Ко всем задачам имеются ответы, а к части задач − указания; задачи расположены по степени сложности.

Нумерация задач дана самостоятельно по главам. При подборе задач были использованы различные сборники задач по высшей математике.

Учебное пособие предназначено для студентов нематематических специальностей вузов.

Данное учебное пособие издано на казахском языке в 2005 году и успешно функционирует.

Авторы благодарят академика НАН Касымова К.А., заслуженного деятеля науки РК, академика МАИ профессора Айсагалиева С.А и президента ассоциации вузов РК профессора Алшанова Р.А. — за поддержку.

Авторы будут признателны за любые отзывы, пожелания и критические замечания, способствующие улучшению качества учебного пособия.

Авторы.

Глава 1.ЧИСЛА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

§1. Вещественные (действительные) числа

1.1 Множества и действия над ними. Множество – это совокупность каких-либо объектов произвольной природы, объединенных по определенным признакам. Объекты, которые образуют множество, называют элементами этого множества или точками.

Если x-элемент множества A, то пишут $x\in A$ (x принадлежит A), если у не является элементом множества A то пишут $y\notin A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$.

Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то говорят, что A содержится в В или что A – подмножество B; говорят также B содержит A. Это обозначается так: $A\subset B$ или $B\supset A$. Говорят, что множества A и B равны, и пишут $A=B$, если $A\subset B$ и $B\subset A$.

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множеств A и B, и пишут $C=A\cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество E, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих множеству A и множеству B и обозначается $E=A\cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество $R=A\setminus B$, состоящее из элементов A, которых нет в B.

Произведением множеств A и B называется множество F всевозможных пар (x,y) таких, что $x\in A,\ y\in B$, и обозначается $F=A\times B$.

Дополнение множества A по отношению к множеству S, при $A\subset S$, есть множество $\overline{A}=S\setminus A$.

Разбиение множества A есть набор его подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которые взаимно не пересекаются и в объединении дают A. Это можно записать как $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=A$ и $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j$, для $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Существуют два способа задания множеств:

а) Множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и записывается в виде $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;

б) $A=\{x\in X \mid \alpha(x)\}$. Эта запись означает, что множество A определяется элементами основного множества X, которые обладают свойством $\alpha(x)$. N={1;2;3;...;n;...} — множество натруальных чисел; Z={...;−n;...;−3;−2;−1;0;1;2;...;n;...} — множество целых чисел.

1.2.Множество вещественных чисел. а) Числа, представимые бесконечными десятичными дробями называются вещественными (или действительными): $a=\pm a_0,a_1,...,a_n...$, где $a_0,a_1,...,a_n...$-числа, принимающие целые значения от 0 до 9.

Множество вещественных чисел R состоит из рациональных и иррациональных чисел. Всякое рациональное число p/q является либо целым, либо его можно представить в виде конечной или периодической бесконечной десятичной дроби. Иррациональное же число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например:

$$\frac{1}{2}=0,5;\ \frac{6}{2}=3;\ \frac{2}{3}=0,666....=0,(6);\ \sqrt{2}=1,41421356....;\ \pi=3,14159...;$$

Рациональные числа, представимые в виде целого числа или конечной дроби рассматриваются как бесконечные дроби, с нулем в периоде.

Для любой пары a и b вещественных чисел определены единственным образом числа $a+b,\ a-b,\ a\cdot b,\ a/b\ (b\neq 0)$.

Вещественные числа сравниваются по правилу сравнения десятичных дробей.

б) **Грани числовых множеств.** Пусть X-непустое множество вещественных чисел.

Определение. Наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество X сверху (снизу), называется точной верхней (нижней) гранью множества X и обозначается символом sup$X$ (inf X).

Sup (“супремум” лат.) − “наивысшее”, inf (“инфимум”, лат.) − “наименьшее”.

Теорема. Любое непустое, ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

в) Абсолютной величиной или модулем действительного (вещественного) числа x называется неотрицательное число

$$|x|=\begin{cases}-x, \text{если } x<0;\\ \ \ x, \text{если } x\geq 0.\end{cases} \qquad (1.1)$$

Основные свойства абсолютных величин:

1) $|x|\geq 0$; 2) $|x|=|-x|$; 3) $-|x|\leq x\leq |x|$

4) $|x|\leq\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon\leq x\leq\varepsilon$; 5) $|x|\geq\alpha$; ($\alpha>0$) $\Leftrightarrow x\geq\alpha$; либо $x\leq-\alpha$;

6) $|x \pm y| \le |x| + |y|$; 7) $|x \pm y| \ge |x| - |y|$; 8) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

9) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \, (y \ne 0)$; 10) $\sqrt{x^2} = |x|$.

1.1. Описать перечислением элементов множество $A = \{x \in Z | (x-3)(x^2-1) = 0 \text{ и } x \ge 0\}$.

Решение: A есть множество всех целых неотрицательных корней уравнения $(x$-$3)(x^2$-$1)$=0. Следовательно, A={1;3}.

В задачах 1.2- 1.6 заданные множества описать перечислением всех своих элементов:

1.2. $A = \{x \in Z | \; x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$;

1.3. $A = \left\{x \in N | \quad x + \dfrac{1}{x} \le 2; \; x > 0\right\}$;

1.4. $A = \{x \in N | \; x^2 - 3x - 4 \le 0\}$;

1.5. $A = \left\{x \in Z | \; \dfrac{1}{4} \le 2^x < 5\right\}$;

1.6. $A = \left\{x \in N | \; \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} < 2\right\}$.

Описать перечислением всех элементов множеств $A \cup B, \; A \cap B, \quad A \setminus B, \; B \setminus A$, если

1.7. A={1,2,3,4,5,6,7}, B={6,7,8,9,10}

Решение. По определению,

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; A \cap B = \{6, 7\}$;

$A \setminus B$={1,2,3,4,5}; $B \setminus A$={8,9,10}.

1.8. $A = \left\{\dfrac{-1}{2}; 0; 1\right\}, B = \{0; 1\}$. **1.9.** $A = \{-1; 0; 1; 2\}, B = \{-1; 1\}$.

1.10. $A = \{0; 2; 4\}, B = \{-1; 0; 1\}$.

1.11. A – множество юношей данной группы, а B – множество девушек этой же группы.

1.12. A={10;15}, B={5;7;9}; **1.13.** A={a,b,c}, B={d,e};

1.14. A={ $x/x^2 - 5x + 6 = 0$ }, B={ $x/x^2 - 4x + 3 = 0$ }.

1.15. A={ $x/x^2 - 4 = 0$ }, B={ $x/x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ }.

1.16. Доказать, что число lg2 иррационально.

Доказательство. Предположим, что lg2 − рациональное число, т. е. $\lg 2 = \frac{m}{n}$, $m, n \in Z$, тогда $10^{\frac{m}{n}} = 2 \Rightarrow 10^m = 2^n \Rightarrow 2^m 5^m = 2^n$. Но последнее равенство невозможно: число 5 входит в разложение левой части на простые множители, но не входит в аналогичное разложение для правой части, что противоречит единственности разложения целых чисел на простые множители. Поэтому исходное предположение неверно, и, следовательно, число lg2 иррационально.

Доказать, что следующие числа иррациональны:

1.17. lg5. **1.18.** $\sqrt{2}$. **1.19.** $\sqrt{3}$. **1.20.** $\sqrt{5}$. **1.21.** $\sqrt{7}$.

В задачах 1.22 − 1.24 сравнить указанные числа:

1.22. $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ и $\sqrt{3} - 2$.

Решение. Предположим, что верно неравенство

$\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2$. Тогда $\sqrt{2} + 2 < \sqrt{5} + \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + 4\sqrt{2} < 8 + 2\sqrt{15} \Rightarrow 2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{15} \Rightarrow 8 < 16 + 2\sqrt{15}$.

Так как последнее неравенство верно, то в силу эквивалентности выполненных преобразований верно и исходное неравенство.

1.23. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} - 2$. **1.24.** $\sqrt{7} - 3$ и $\sqrt{5} - 2$.

В задачах 1.25−1.28 найти сумму, разность, произведение и частное действительных чисел:

1.25. a=0,(13) и b= 0,(12). **1.26.** a=2,(5) и b=2(4).

1.27. a=0,1(5) и b=0,1(4). **1.28.** a= 1,2(25) и b=2,3(11).

1.29. Найти точные верхнюю и нижнюю грани множества [0, 2).

Решение. Это множество не имеет наибольшего элемента, т.к. для всякого $x \in [0, 2)$ найдется $y \in [0, 2)$ такое, что $y > x$. Множество верхних граней для полуинтервала [0, 2)− это множество $[2, +\infty)$ с наименьшим элементом равным 2. Поэтому sup [0, 2)=2, причем $2 \notin [0, 2)$.

С другой стороны, наименьший элемент для рассматриваемого множества [0, 2) существует и равен 0. Множество нижних граней— это множество $(-\infty, 0]$ с наибольшим элементом, равным нулю, который и является точной нижней гранью полуинтервала, [0,2). Таким образом min [0,2)=inf[0,2)=0, причем $0 \in [0,2)$.

Для следующих множеств найти max$X$, min$X$, sup$X$, inf$X$, если они существуют:

1.30. $X=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$. **1.31.** $X=\left\{X\in R \middle| x=\frac{1}{3^n},\ n\in N\right\}$

1.32. $X=[-2;2]$. **1.33.** $X=\{x\in Z|-7\le x<2\}$

1.34. $X=\{x\in R|x<0\}$. **1.35.** $X=\{x\in R|x>0\}$

1.36. $X=[-2;1)$.

1.37. $X=\{x\in R\mid x=\frac{m}{n};m,n\in N$ и $m<n\}$.

1.38. $X=(-1;1)$. **1.39.** $X=\{x\in R|x\le 2\}$.

1.40. $X=\{x\in R|x\ge 1\}$.

Найти решения уравнения.

1.41. $|x|=x+3$.

Решение. При $x\ge 0$ имеем $x=x+3\Rightarrow 0=3$ - неверное равенство; следовательно, решения нет. При $x<0$ получаем $-x=x+3\Rightarrow$ $\Rightarrow -2x=3\Rightarrow x=-1{,}5$ - решение уравнения.

1.42. $|x|=x-3$. **1.43.** $3|x|+x=5$.

1.44. Решить уравнение $|x-5|=x-5$.

Решение. По определению $|x|=x$ при $x\ge 0$. Следовательно данное уравнение представится в виде $x-5\ge 0$, откуда $x\ge 5$. Таким образом данное уравнение имеет бесконечно много решений.

Решить уравнения:

1.45. $|x+4|=|x-4|$. **1.46.** $x^2-2|x|-3=0$.

1.47. $|x|=|x+1|$. **1.48.** $||x-1|+2|=1$.

1.49. $||x+1|+2|=3$. **1.50.** $|\sin x|-\sin x=2$.

1.51. $|x-1|+|1-2x|=2|x|$.

Решить неравенства:

1.52. $|5x-2|\le 5$.

Решение. В силу свойства 4^0 абсолютных величин имеем $-5\le 5x-2\le 5$, откуда $-3/5\le x\le 7/5$.

1.53. $|x+3|<0{,}1$. **1.54.** $|x-5|\le 1$.

1.55. $|x-3|\ge 10$ **1.56.** $|x|>|x+3|$.

1.57. $|3x-1|<|x-1|$.

1.58. $|x-2|>1$.

1.59. $\left|\frac{x-2}{3x+1}\right|\le 1$.

1.60. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$.

1.61. $|x^2-2x-3|<3x-3$

1.62. $|x^2-3x|>|x^2|-|3x|$.

1.63. $|x-3|+|x+3|>8$.

1.64. $|x+3|-|x+1|<2$.

1.65. Какое из чисел меньше: a или $-a$?

Найти множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B, B\setminus A$ и изобразить их на числовой прямой:

1.66. $A=(-1;2]$ и $B=[1;4]$.

1.67. $A=[-2;1]$ и $B=(0;4]$.

1.68. $A=[-5;0]$ и $B=[-3;2]$.

1.69. $A=[0;3)$ и $B=(1,4]$.

1.70. $A=(-\infty;4]$ и $B=(2;\infty)$.

1.71. $A=(-3;4)$ и $B=(2;5)$.

Учитывая $A\subset S=[0,1]$, найти и изобразить на числовой оси дополнения $\overline{A}$ следующих множеств:

1.72. $A=\{0;1\}$.

Решение. Так как $\overline{A}=S\setminus A$ имеем $\overline{A}=(0,1)$.

1.73. $A=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

1.74. $A=\left(\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$.

1.75. $A=\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

1.76. $A=\left[\frac{1}{2};1\right)$.

1.77. Докажите, что дополнение $\overline{A}$ множества A (относительно S) удовлетворяет следующим соотношениям:

а) $A\cup\overline{A}=S$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$, б) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

в) если $A\subset B$ и $C\subset B$, то $\overline{B}\subset\overline{A}\cap\overline{C}$

1.78. Укажите разбиение множества $A=[0,1]$ на 5 взаимно не пересекающихся подмножеств.

Решение. Разбиение не единственно, лишь бы выполнялись условия: $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j$ b $\bigcup\limits_{i=j}^{5}A_i=A$. Можно разбить, в частности, следующим образом:

$$A_1=\left[0;\ \frac{1}{5}\right); A_2=\left[\frac{1}{5};\ \frac{2}{5}\right); A_3=\left[\frac{2}{5};\ \frac{3}{5}\right); A_4=\left[\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right); A_5=\left[\frac{4}{5};\ 1\right].$$

1.79. Укажите разбиение множества $A=[0,2]$ на 7 подмножеств различными способами.

§2. Системы координат и их простейшие применения

2.1. Декартовы координаты на прямой. Прямая с выбранным на ней положительным направлением называется осью. (рис.1.1.)

Отрезок на оси называется направленным, если указано, какая из граничных точек является началом и какая − концом. Направленный отрезок обозначается символом $\overline{AB}$, где *A*- обозначает начало, а *B* - конец отрезка.

Величиной *AB* направленного отрезка $\overline{AB}$ называется число, равное $|\overline{AB}|$- длине отрезка, если направления отрезка и оси совпадают, и равное - $\overline{AB}$, если эти направления противоположны.

Если точки *A* и *B* направленного отрезка $\overline{AB}$ совпадают, то $AB=0$, а направление не определено.

Основное тождество. Для любых трех точек *A*, *B*, *C* на оси справедливо тождество: $AB+BC=AC$.

Координатной осью (координатной прямой или числовой прямой) называется прямая, на которой выбраны точка О, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление.

Декартовой координатой точки М на координатной оси называется число $x=OM$ (рис1.1) и символически обозначается $M(x)$.

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных (действительных) чисел и точками координатной оси.

Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ две точки координатной оси (рис.1.2). Тогда: величина M_1M_2 направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ на координатной оси:

$$M_1M_2 = x_2 - x_1; \qquad (1.2)$$

расстояние между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на координатной оси

$$d = \left|\overline{M_1M_2}\right| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}\ . \qquad (1.3)$$

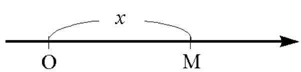

Рис. 1.1.

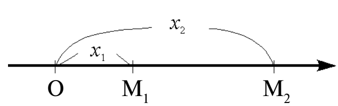

Рис. 1.2.

2.2. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве

Две взаимно перпендикулярные оси *Ox* (ось абсцисс) и *Oy* (ось ординат), с общим началом *O* и одинаковой масштабной единицей

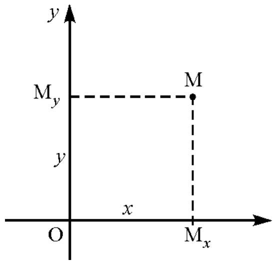

Рис. 1.3.

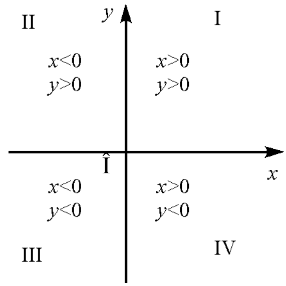

Рис. 1.4.

образуют декартову прямоугольную систему координат Oxy на плоскости.

1. Расстояние ρ между двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,, \tag{1.4}$$

где $x_2 - x_1 = \text{Пр}_x \overline{M_1M_2}$, $y_2 - y_1 = \text{Пр}_y \overline{M_1M_2}$.

2. Если точка $M(x;y)$ делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, где $\lambda \neq -1$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\,;\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\,. \tag{1.5}$$

В частности, при делении пополам, т.е. в отношении $\lambda=1$,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\,;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2}\,. \tag{1.5′}$$

3. Площадь S многоугольника с вершинами $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2),\ldots,M_n(x_n;y_n)$ равна

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\|. \tag{1.6}$$

где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$

Три взаимно перпендикулярные оси (координатные оси) в пространстве с общим началом в точке O и одинаковой масштабной единицей (рис. 1.5) образуют декартову прямоугольную систему координат в пространстве. O – начало координат, Ox – ось абсцисс, Oy –ось ординат, Oz –ось аппликат, $Oxyz$ –координатное пространство.

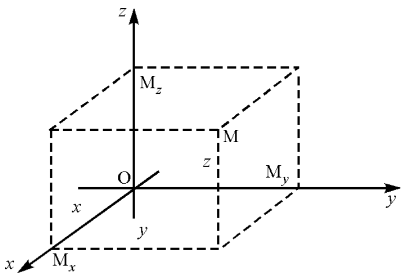

Рис. 1.5.

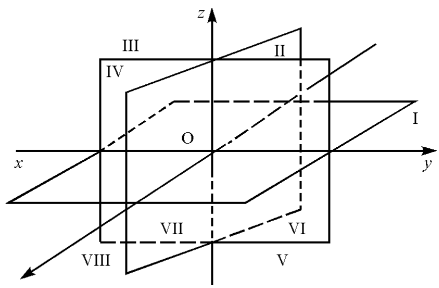

Рис. 1.6.

Пусть M – произвольная точка координатного пространства $Oxyz$. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные координатным осям Ox, Oy и Oz. Точки пересечения плоскостей с осями обозначим через M_x, M_y, M_z. Декартовыми (прямоугольными) координатами точки M называются числа $x = OM_x$ - абсцисса, $y = OM_y$ - ордината, $z = OM_z$ - аппликата (рис. 1.5).

Символ $M(x;y;z)$ обозначает, что точка M имеет координаты x, y, z. Таким образом, при выбранной системе координат $Oxyz$ каждой точке M пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел $(x;y;z)$ - ее декартовы прямоугольные координаты, и обратно, каждой упорядоченной тройке чисел $(x;y;z)$ соответствует, и при том одна, точка M в пространстве $Oxyz$. Плоскости Oxy, Oyz, Oxz называются координатными плоскостями и они делят все пространство на восемь частей называемых октантами (рис. 1.6).

1. Расстояние ρ между двумя точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,, \qquad (1.7)$$

где $x_2 - x_1 = \text{Пр}_x \overline{M_1M_2}$, $y_2 - y_1 = \text{Пр}_y \overline{M_1M_2}$, $z_2 - z_1 = \text{Пр}_z \overline{M_1M_2}$.

2. Если точка $M(x;y;z)$ делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, где $\lambda \neq -1$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\,;\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\,;\ \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.8)$$

В частности, при делении пополам, т.е. в отношении λ=1,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (1.8')$$

1.80. Построить на числовой оси точки $A(-3)$, $B(5)$ и $C(-4)$ и найти величины AB, BC и AC, направленных отрезков $|\overline{AB}|$, $|\overline{BC}|$ и $|\overline{AC}|$. Проверить $AB+BC=AC$.

Найти величину AB и длину $|\overline{AB}|$ отрезка $|\overline{AB}|$, заданного точками:

1.81. а) $A(-3)$ и $B(-5)$; б) $A(-2)$ и $B(5)$.
1.82. а) $A(2)$ и $B(-5)$; б) $A(0)$ и $B(-4)$.
1.83.а) $A(-1)$ и $B(4)$; б) $A(-5)$ и $B(2)$.

Вычислить координату точки A, если известны:

1.84. а) $B(2)$ и $AB=3$; б) $B(-3)$ и $AB=-3$; в) $B(-1)$и $AB=3$.
1.85. а) $B(-5)$ и $BA=-3$; б) $B(0)$ и $|AB|=2$; в) $B(2)$ и $|AB|=3$.
1.86. а) $B(-1)$ и $|AB|=4$; б) $B(-4)$ и $|AB|=1$; в) $B(1)$ и $|AB|=6$.

Решить неравенства:

1.87. а) $|x|\le 1$; б) $|x-2|<1$; в) $|2x-3|\le 1$.

1.88. а) $|x|>1$; б) $|x-3|\ge 1$; в) $|3x-1|>0$.

1.89. а) $|x-3|\le 2$; б) $|x-4|\ge 0$.

1.90. а) $|x-5|\le 1$; б) $|x-5|\ge 2$.

1.91. а) $|x^2-5x+6|>x^2-5x+6$; б) $|x|<x+1$.

1.92. а) $|x-4|<\varepsilon$; б) $|x-4|>\varepsilon$.

1.93. Найти расстояние между точками $A(2;-1)$ и $B(5;3)$.

Решение. В данном случае $x_1=2$, $y_1=-1$; $x_2=5$; $y_2=3$, а поэтому по формуле (1.4) имеем:

$$d=|AB|=\sqrt{(5\text{-}2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

1.94. На оси Ox найти точку, отстоящую от точки $M(2;5)$ на расстоянии 13 единиц масштаба.

Решение. Ордината любой точки, лежащей на Ox, равна нулю, следовательно, искомая точка $N(x;0)$.

$|MN|=\sqrt{(x-2)^2+(0-5)^2}$. Подставляя вместо $|MN|$ значение, равное 13 и решая полученное уравнение, находим x:

$$\sqrt{(x-2)^2+25}=13,\ \Rightarrow (x-2)^2=169-25=144 \Rightarrow x_1=14;\ \ x_2=-10.$$

Точки $N_1(14;0)$ и $N_2(-10;0)$ удовлетворяют условиям задачи.

1.95. Сторона квадрата равна 5. Определить координаты его вершин, приняв за оси координат: 1) две смежные стороны; 2) две диагонали; 3) прямые параллельные его сторонам и проходящие через его центр.

1.96. Даны точки $A(0;0)$, $B(3;-4)$, $C(-3;4)$; $D(-2{:}2)$ и $E(10;-3)$. Определить расстояние d между точками : 1) A и B; 2) B и C; 3) A и C; 4) C и D; 5) A и D; 6) D и E.

1.97. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;2)$ − прямоугольный.

Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки:

1.98. $A(2;-3)$, $B(-3;4)$ и $C(3;6)$.

Решение. В нашем случае

$x_1=2$, $y_1=-3$, $x_2=-3$, $y_2=4$, $x_3=3$, $y_3=6$.

По формуле (1.5) имеем ($n=3$):

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 6\\ 2 & -3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\bigl|(2\cdot 4-(-3)(-3))+$$

$$+((-3)\cdot 6-3\cdot 4)+(3\cdot(-3)-2\cdot 6)\bigr|=\frac{1}{2}\left|(-1-30-21)\right|=26 \text{ кв.ед.}$$

1.99. $A(2;-3)$, $B(3;2)$, $C(-2;5)$.

1.100. $D(-3;2)$, $E(5;-2)$, $F(1;3)$.

1.101. $M(3;-4)$, $N(-2;3)$, $P(4;5)$.

1.102. Точки $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ 6)$, $C(1;\ 3)$ вершины треугольника. Вычислить длину его высоты, проведенной из вершины C.

1.103. Показать, что точки $A(6;3)$, $B(1;-2)$, $C(-2;-5)$ лежат на одной прямой.

1.104. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(3;1)$, $B(4;6)$, $C(6;3)$ и $D(5;-2)$.

1.105. Определить расстояние между точками $A(1;-2;-3)$ и $B(2;-3;0)$.

Решение. По формуле (1.7) получим:

$$|AB|=\rho(A;B)=\sqrt{(2-1)^2+(-3-(-2))^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{11}\,.$$

1.106. Даны точки $B(2;-3;\ 0)$, $C(3;1;9)$ и $D(-1;1;12)$. Определить расстояние ρ между точками: а) B и D; б) C и D.

1.107. Найти расстояния от начала координат О до точек $A(4;-2;\ -4)$ и $B(-4;12;6)$.

1.108. Показать, что треугольник с вершинами в точках $A(3;-1;\ 6)$, $B(-1;7;-2)$ и $C(1;-3;2)$ − прямоугольный.

1.109. Показать, что треугольник с вершинами в точках $A(3;-1;\ 2)$, $B(0;-4;2)$ и $C(-3;2;1)$ − равнобедренный.

1.110. В точках $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$ расположены, соответственно, массы m_1, m_2, m_3. Определить координаты центра тяжести этой системы масс.

Указание. Центр тяжести делит отрезок *AB* в соотношении $\lambda = \frac{m_1}{m_2}$, где масса m_1 расположена в точке *A*, а масса m_2 расположена в точке *B*.

1.111. Отрезок, ограниченный точками *A*(3;−2) и *B*(6;4), разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

Решение. Пусть *C* и *D* − искомые точки деления. Точка *D* делит отрезок *AB* в отношении $\lambda = AD : DB = 2$. Координаты ее x_D, y_D найдутся по формулам (1.5), куда вместо x_1, y_1 подставим координаты точки *A* и вместо x_2, y_2 - координаты точки *B*:

$$x_D = \frac{3+2\cdot 6}{1+2} = 5,\; y_D = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2; \quad D(5;2).$$

Координаты $C(x_C;y_C)$ по формулам (1.5/) если рассматривать эту точку как середину отрезка *A D* :

$$x_C = \frac{3+5}{2} = 4,\; y_C = \frac{-2+2}{2} = 0,\; C(4;0).$$

Можно вычислить координаты точки *C* по формулам (1.5), взяв $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$ или $\lambda = \frac{BC}{CA} = 2$.

1.112. Построить точки *A*(−2;1) и *B*(3; 6) и найти точку *M*(*x*;*y*), делящую *AB* в отношении *AM*: *MB*=3:2.

1.113. Даны точки *A*(−2;1) и *B*(3;6). Разделить отрезок *AB* в отношении *AM*: *MB*= −3:2.

1.114. Определить координаты вершин треугольника, зная середины его сторон: *P*(2; 3), *Q*(5; 4), *R*(6;−3).

1.115. Даны вершины треугольника: *A*(3;5), *B*(−3;3), *C*(5;−8). Определить длину медианы, проведенной из вершины *C*.

1.116. Даны три вершины параллелограмма: *A*(1;−3), *B*(3;−1), *C*(−3;5). Определить четвертую вершину *D*, противолежащую вершине *B*.

1.117. Даны вершины треугольника *A*(1;−3), *B*(3;−5) и *C*(−5;7). Определить середины его сторон.

1.118. Даны две смежные вершины параллелограмма *A*(−3;5), *B*(1;7) и точка пересечения его диагоналей *M*(1;1). Определить две другие вершины.

1.119. Точки $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ и $P(-2;2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

1.120. Даны три вершины параллелограмма: $A(3;-5)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

1.121. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами в точках $A(2;5:0)$, $B(11;3;8)$, $C(5;1;12)$.

Указание. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

1.122. Центр тяжести однородного стержня находится в точке $N(1;-1;5)$, один из его концов в точке $A(-2;-1;7)$. Найти координаты другого конца стержня.

1.123. Найти середины сторон треугольника с вершинами в точках $N_1(3;2;-5)$, $N_2(1;-4;3)$, $N_3(-3;0;1)$.

1.124. Вершинами треугольника являются точки $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-6)$, $C(-5;0;2)$. Найти длину медианы, опущенной из вершины A.

1.125. Отрезок AB разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления, если известны точки $A(-1;8;3)$ и $B(9;-7;-2)$.

1.126. Отрезок AB разделен точками $C(2;0;2)$ и $D(5;-2;0)$ на 3 равные части. Найти координаты точек A и B.

1.127. Даны три вершины $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-4)$ и $C(-1;1;2)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D.

2.3. Полярные координаты

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O (полюс), луча OA (полярная ось) и единицей масштаба.

Символ $M(\rho,\varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты ρ (полярный радиус) и φ (полярный угол) (рис. 1.7). Обычно считают, что ρ и φ изменяются в пределах: $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Однако, иногда рассматриваются углы большие 2π, а также отрицательные, т.е. углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке.

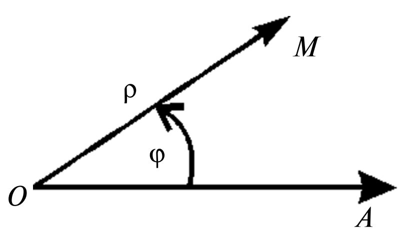

Рис.1.7.

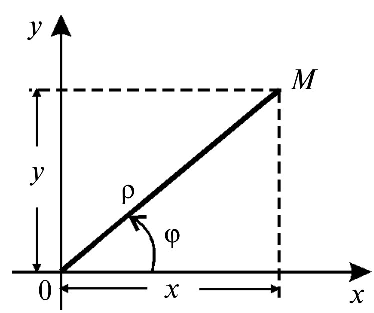

Рис.1.8.

Связь между полярными координатами точки M и декартовыми координатами (рис.1.8).

Пусть начало декартовой прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью и пусть точка M имеет декартовы прямоугольные координаты x и y, и полярные координаты ρ и φ. Тогда координаты будут связаны следующими формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi \tag{1.9}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.10}$$

Из этих формул следует, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.11}$$

Последняя из формул (1.10) определяет два угла φ и $\varphi+\pi$ в пределах от 0 до 2π. Формулы (1.11) уточняют, какой из этих углов следует выбрать.

1.128. Точка M имеет прямоугольные координаты $x = 1, y = -\sqrt{3}$. Найти полярные координаты точки M.

Решение. По формулам (1.10) имеем:

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2; \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}.$$

Точка M расположена в четвертой четверти, следовательно $\varphi = \frac{5\pi}{3}$, т.е. $M(2; \frac{5\pi}{3})$.

1.129. Точка N имеет полярные координаты $\rho = 2\sqrt{2}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$. Найти прямоугольные координаты точки N.

Решение. По формулам (1.9) имеем:

$$x = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2; \ y = 2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2,$$ т.е. $N(-2;2)$.

1.130. Построить точки, заданные полярными координатами: $A\left(3; \frac{\pi}{2}\right), B(2;\pi), C\left(3; \frac{3\pi}{4}\right), D\left(4; \frac{7\pi}{4}\right)$.

1.131. Даны точки в полярной системе координат $A\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4;\frac{\pi}{2}\right), C\left(3;\frac{3\pi}{2}\right), D\left(4;\frac{3\pi}{2}\right)$. Найти их прямоугольные координаты.

1.132. Даны точки в прямоугольной системе координат $A(0;2)$, $B(-1;0)$, $C\left(-\sqrt{3};1\right)$, $E(-1;-1)$, $F\left(1;\sqrt{3}\right)$. Найти их полярные координаты.

1.133. В полярной системе координат даны точки $M_1(\rho_1;\varphi_1)$, $M_2(\rho_2;\varphi_2)$. Вычислить расстояние d между ними.

1.134. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $P\left(12;-\frac{\pi}{10}\right), Q\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$. Определить его площадь.

1.135. Одна из вершин треугольника *OAB* находится в полюсе *O*, две другие суть точки $A(5;\frac{\pi}{4})$, $B(4;\frac{\pi}{12})$. Вычислить площадь этого треугольника.

§4. Комплексные числа

3.1. Комплексным числом z называется упорядоченная пара вещественных чисел $(x;y)$, т.е. $z=(x;y)$.

x называется вещественной, а y- мнимой частью комплексного числа z и обозначаются $x=\operatorname{Re} z, y=\operatorname{Im} z$.

Комплексное число $z=(x,y)$ изображается на плоскости *Oxy* точкой с координатами $(x;y)$. Плоскость *Oxy* в этом случае называется условно комплексной плоскостью.

Число $(0;y)$ называется чисто мнимым, а чисто мнимое число $(0;1)$ − мнимой единицей и обозначается буквой i, т.е. $i=(0;1)$. По определению полагают $(x;0)=x$, $(0;y)=i\,y$, $(0;0)=0$.

Множество комплексных чисел обозначается символом *C*.

Пусть $z_1=(x_1;y_1)$, $z_2=(x_2;y_2)$- два комплексных числа. По определению: $z_1=z_2$, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$; сумма $z=z_1+z_2=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$; разность $z=z_1-z_2=(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$; произведение $z=z_1\cdot z_2=(x_1x_2-\ y_1y_2;$ $x_1y_2+x_2\ y_1)$; частное: $z=\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2};\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right), z_2\neq 0$, Из определения произведения комплексных чисел следует основное равенство $i^2=-1$. Отсюда следует, что $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=-i$ и т.д.

3.2. Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$ и позволяет производить действия над комплексными числами по обычным правилам алгебры многочленов. $z=x+iy$ и $\bar{z} = x - iy$ - взаимно сопряженные числа. $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа, где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, ρ — модуль, а φ — аргумент числа z и обозначаются $\rho = |z|$, $\varphi = Argz$, причем φ определен с точностью $2k\pi$, т.е. $\varphi = \mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi;\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \arg z = \varphi_0 = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$,

где $0 \le \rho < \infty, 0 \le \varphi_0 < 2\pi$ или $-\pi < \varphi_0 \le \pi;\ k = 0;\pm1;\pm2;...$.

Если $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Если $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (1.12)$$

При ρ=1 (1.12) называется формулой Муавра.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right), (k=0,1,...,n-1) \qquad (1.13)$$

Показательная форма комплексного числа:

$z = |z| \cdot e^{i\arg z}$, где $-\pi < \arg z \le \pi$ или $0 \le \arg z < 2\pi$.

3.3. Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \qquad (1.14)$$

3.4. Логарифм комплексного числа

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi_0 + 2k\pi i = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i;\ k=0;\pm1;\pm2;... \qquad (1.15)$$

где $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi_0 \le \pi$). Выражение $\ln|z| + i\varphi_0$ называется главным значением логарифма.

3.5. Алгебраические уравнения. Уравнение вида

$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0, a_n \ne 0$ называется алгебраическим уравнением n-й степени, где $z \in C$, $n \in N$, $a_0, a_1, ..., a_n$ - коэффициенты, вообще говоря, комплексные.

Основная теорема алгебры (Гаусс). Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень (вообще говоря, комплексный).

Следствие 1. Многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать, столько раз, какова его кратность.

Следствие 2. Если коэффициенты алгебраического уравнения действительные числа и комплексное число $a+bi$ является корнем этого уравнения, то сопряженное число $a-bi$ также является корнем этого уравнения.

Выполнить действия:

1.136. $(2+i3)+(1+i4)$.

Решение. Имеем $(2+i3)+(1+i4)=(2+1)+i(3+4)=3+i7$.

1.137. $(3+i5)(4-i)$;

Решение. По правилу произведения многочленов имеем $(3+i5)(4-i)=3\cdot 4-3\cdot i+4\cdot i5-i\cdot i5=12-i3+i20+5=17+i17$.

1.138. $\dfrac{3-i}{4+i5}$.

Решение. Умножая числитель и знаменатель на сопряженное число, получим:

$$\frac{3-i}{4+i5}=\frac{(3-i)(4-i5)}{(4+i5)(4-i5)}=\frac{12-i15-i4-5}{16+25}=\frac{7}{41}-i\frac{19}{41};$$

1.139. $(6+i\,11)(7+i\,3)$. **1.140.** $(1-i)(3+i\,4)$. **1.141.** $(2+i)+(3-i\,2)$.

1.142. $(7+i\,5)-(9+i\,7)$. **1.143.** $(3-i\,2)^2$. **1.144.** $(1+i)^3$.

1.145. $(x+i\,y)(x-i\,y)$. **1.146.** $(2-i)^4$. **1.147.** $(1-i)(3+i\,4)$.

1.148. $\dfrac{2-i}{1+i}$. **1.149.** $\dfrac{i}{2-i}$. **1.150.** $(2+i\,3)^3$.

1.151. $\dfrac{1}{(3-i2)^2}$. **1.152.** $\dfrac{(1-i2)(2-i3)}{(3-i4)(4-i5)}$.

1.153. $\dfrac{(3+i5)(2+i3)}{1+i2}$. **1.154.** $\dfrac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$.

1.155. $\dfrac{1}{i}$. **1.156.** $\dfrac{1}{i^3}$.

1.157. Комплексное число $z=-1+i\sqrt{3}$ изобразить вектором и представить в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Для $z=-1+i\sqrt{3}$ имеем (рис. 1.9)

$$\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,\ \ \varphi_0=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)=\frac{2}{3}\pi.$$

Таким образом, −

$$1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)=2\,e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

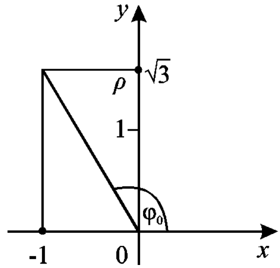

Рис. 1.9.

Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1.158. $z=1.$ **1.159.** $z=-1.$ **1.160.** $z=i.$

1.161. $z=-i.$ **1.162.** $z=2+2i.$ **1.163.** $z=-5i.$

1.164. $z=-3-2i.$ **1.165.** $z=5-5i.$ **1.166.** $z=2+4i.$

1.167. $z=\sqrt{3}-i.$ **1.168.** $z=2003.$ **1.169.** $z=2\cos\frac{\pi}{3}-2i\sin\frac{\pi}{3}.$

1.170. $z=12i.$ **1.171.** $z=1-\sqrt{3}.$ **1.172.** $z=-4-3i.$

1.173. $z=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}.$

Доказать, что:

1.174. а) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

1.175. а) $\operatorname{Re}z=\frac{z+\overline{z}}{2}$; б) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

Вычислить:

1.176. $i.\ i^2.\ i^3.\ \ldots i^{100}.$ **1.177.** $i^4+i^{14}+i^{24}.$

1.178. $(\cos9^0+i\sin9^0)^{10}.$ **1.179.** $(1-i\sqrt{3})^6.$

1.180. $(-1+i)^5.$ **1.181.** $(\cos10^0+i\sin10^0)^{27}.$

1.182. $(1-i)^6.$ **1.183.** $(2+i\sqrt{12})^5$

1.184. $z=[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})]^{12}.$ **1.185.** $(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})^{100}.$

1.186. Решить уравнение $x^5+32=0$ на множестве комплексных чисел.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x=\sqrt[5]{-32}$. Число (−32) в тригонометрической форме представляется в виде $-32=32(\cos\pi+$ $+i\sin\pi)$.

По формуле(1.13) находим:

$$x=\sqrt[5]{32(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right),\text{ где}$$

$k=0,1,2,3,4.$

Полагая, поочередно $k = 0,1,2,3,4$, получим

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right); \qquad x_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right);$$

$$x_3 = 2\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -2; \qquad x_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right);$$

$$x_5 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$

Найти все значения корней:

1.187. $\sqrt[3]{-i}$. **1.188.** $\sqrt[4]{-16}$. **1.189.** $\sqrt[5]{1+i}$. **1.190.** $\sqrt[3]{8}$.

1.191. $\sqrt[3]{-1}$. **1.192.** $\sqrt[4]{-1}$. **1.193.** $\sqrt[6]{1}$. **1.194.** $\sqrt[3]{1}$.

Решить уравнения:

1.195. $x^2 + 25 = 0$. **1.196.** $x^2 + 4 = 0$. **1.197.** $x^3 + 1 = 0$.
1.198. $x^4 + 16 = 0$. **1.199.** $x^2 + 2x + 5 = 0$. **1.200.** $4x^2 - 2x + 1 = 0$.
1.201. $x^3 - 8 = 0$. **1.202.** $x^3 + 8 = 0$. **1.203.** $(x+1)^4 - 16 = 0$.
1.204. $(x+1)^4 + 16 = 0$. **1.205.** $x^4 + 18x^2 + 81 = 0$. **1.206.** $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$.
1.207. $x^4 + 9x^2 + 20 = 0$.

Разложить на множители многочлены:

1.208. $x^3 - 2x^2 + 9x - 18$.

Решение. Данный многочлен третьей степени на множестве комплексных чисел имеет три корня. Из курса алгебры известно, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z = a + ib$, то сопряженное число $\bar{z} = a - ib$ также является корнем этого многочлена. В нашем случае числа 2, $i3$ и $-i3$ являются корнями многочлена, следовательно, его можно представить в виде:

$$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = (x-2)(x^2+9) = (x-2)(x+i3)(x-i3).$$

Если потребуется разложение на действительные множители, то имеем: $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = (x-2)(x^2+9)$.

1.209. $x^2 - 25$. **1.210.** $x^2 + 25$. **1.211.** $x^3 - x^2 + 4x - 4$.
1.212. $x^3 + x^2 - 4x - 4$. **1.213.** $x^3 + 2x^2 + x + 2$. **1.214.** $x^3 - 2x^2 + 16x - 32$.
1.215. $x^4 - 1$. **1.216.** $x^4 - 16$. **1.217.** $x^4 - 81$.

Найти логарифмы комплексных чисел:

1.218. $\ln i$.

Решение. Так как $|i| = 1$, $\varphi_0 = \arg i = \frac{\pi}{2}$, то по формуле (1.15) получаем: $\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + i \cdot 2\pi k = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1.219. $\ln(-2)$. **1.220.** $\ln(1+i)$. **1.221.** $\ln(-5)$.
1.222. $\ln(-3)$. **1.223.** $\ln(-1+i)$. **1.224.** $\ln(\sqrt{3}+i)$.